ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΣ: **ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΦΥΣΙΚΗ**

Ημερομηνία: Δευτέρα 7 Ιανουαρίου 2019
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. δ

Α2. δ

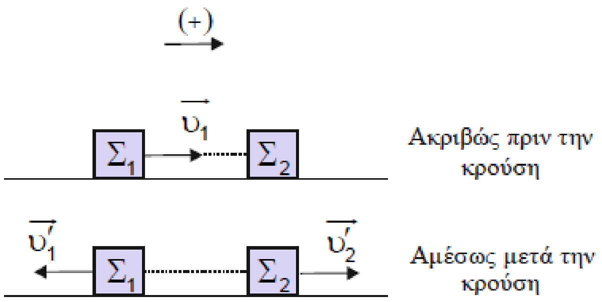
Α3. β

Α4. α

Α5. **α.**Λάθος
β.Λάθος
γ.Λάθος
δ.Σωστό
ε.Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστή επιλογή **α**



Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής για την κρούση των σωμάτων Σ_1 και Σ_2. Το σύστημα των δύο σωμάτων θεωρείται μονωμένο.

$$\vec{p}_{\pi\rho\iota\nu} = \vec{p}_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p'}_1 + \vec{p'}_2 \Rightarrow m_1 \cdot \vec{\upsilon}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon}_2 = m_1 \cdot \vec{\upsilon'}_1 + m_2 \cdot \vec{\upsilon'}_2$$

Ορίζουμε ως θετική τη φορά της ταχύτητας του σώματος Σ_1 ακριβώς πριν την κρούση και έχουμε ότι:

$$m_1 \cdot \cancel{\upsilon_1} + 0 = m_1 \cdot \left(\frac{-\cancel{\upsilon_1}}{2}\right) + m_2 \cdot \left(\frac{\cancel{\upsilon_1}}{2}\right) \Rightarrow \boxed{3 \cdot m_1 = m_2} (1)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος του συγκρουόμενων σωμάτων ακριβώς πριν την κρούση είναι ίση με:

$$K_{\pi\rho\iota\nu} = K_1 + K_2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2$$

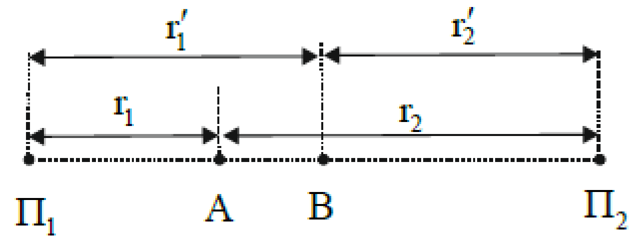
Η κινητική ενέργεια του συστήματος του συγκρουόμενων σωμάτων αμέσως μετά την κρούση είναι ίση με:

$$K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = K'_1 + K'_2 = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot m_1 \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot m_1 \cdot \left(\frac{\upsilon_1}{2}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{K_{\mu\varepsilon\tau\acute{\alpha}} = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot \upsilon_1^2 = K_{\pi\rho\iota\nu}}$$

Β2. Σωστή επιλογή **α**



Έστω ότι το σημείο Α βρίσκεται στην κ υπερβολή ενίσχυσης και απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις r_1και r_2 αντίστοιχα.

$$r_1 - r_2 = κ \cdot λ \; (1)$$

Το σημείο Β βρίσκεται στην κ+2 υπερβολή ενίσχυσης και απέχει από τις πηγές $Π_1$ και $Π_2$ αποστάσεις r_1' και r_2' αντίστοιχα.

$$r_1' - r_2' = (κ+2) \cdot λ \; (2)$$

Αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (2), (1) και έχουμε ότι:

$$r_1' - r_1 - r_2' + r_2 = (κ+2) \cdot λ - κ \cdot λ \Rightarrow (ΑΒ) + (ΑΒ) = 2λ \Rightarrow λ = (ΑΒ) = 0{,}05 \text{ m}$$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης των κυμάτων θα ισούται με:

$$υ_δ = λ \cdot f \Rightarrow υ_δ = (0{,}05 \cdot 50)\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{υ_δ = 2{,}5\frac{\text{m}}{\text{s}}}$$

Β3. Σωστή επιλογή γ

<u>Από τις δοσμένες γραφικές παραστάσεις παρατηρούμε ότι</u>:

i. Οι δύο επιμέρους ταλαντώσεις έχουν το ίδιο πλάτος $A_1 = A_2 = A$.

ii. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο αν εκτελούσε μόνο την ταλάντωση (1) θα είχε απομάκρυνση $x_1 = 0$ και θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Άρα

$$x_1 = A_1 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_{01}) \overset{x_1=0,\, t=0}{\Rightarrow} 0 = A_1 \cdot \eta\mu\varphi_{01} \Rightarrow \eta\mu\varphi_{01} = \eta\mu 0 \overset{\upsilon_1>0}{\Rightarrow} \varphi_{01} = 0$$

iii. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το υλικό σημείο αν εκτελούσε μόνο την ταλάντωση (2) θα είχε απομάκρυνση $x_2 = \frac{A\sqrt{3}}{2}$ και θετική ταχύτητα ταλάντωσης. Άρα

$$x_2 = A_2 \cdot \eta\mu(\omega t + \varphi_{02}) \overset{x_2=\frac{A\sqrt{3}}{2},\, t=0}{\Rightarrow} \frac{A\sqrt{3}}{2} = A_2 \cdot \eta\mu\varphi_{02} \Rightarrow$$

$$\eta\mu\varphi_{02} = \eta\mu\frac{\pi}{3} \overset{\upsilon_2>0}{\Rightarrow} \varphi_{02} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

Η διαφορά φάσης των δύο επιμέρους ταλαντώσεων που εκτελεί το υλικό σημείο είναι ίση με:

$$\varphi = \varphi_{02} - \varphi_{01} = \frac{\pi}{3}\,\text{rad}$$

Το πλάτος της σύνθετης ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο είναι ίσο με:

$$A_{o\lambda} = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2 \cdot A_1 \cdot A_2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow A_{o\lambda} = \sqrt{A^2 + A^2 + 2 \cdot A^2 \cdot \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$A_{o\lambda} = \sqrt{3} \cdot A$$

Η ενέργεια της σύνθετης ταλάντωσης που εκτελεί το υλικό σημείο θα ισούται με:

$$E = \frac{1}{2} \cdot D \cdot A_{o\lambda}^2 = \frac{3}{2} \cdot D \cdot A^2$$

Το υλικό σημείο αν εκτελούσε μόνο την ταλάντωση (1) θα είχε ενέργεια ίση με:

$$E_1 = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A_1^2 = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2$$

Το υλικό σημείο αν εκτελούσε μόνο την ταλάντωση (2) θα είχε ενέργεια ίση με:

$$E_2 = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A_2^2 = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2$$

Συνεπώς οι ενέργειες ταλάντωσης ικανοποιούν τη σχέση

$$\boxed{E = 2\cdot E_1 + E_2}$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από την εξίσωση της ταχύτητας ταλάντωσης της κοιλίας στην αρχή $O(x=0)$ λαμβάνουμε τα εξής στοιχεία:

$$\omega\cdot 2A = 0,4\pi\ (1) \text{ και } \omega = 4\pi \text{ rad/s}$$

Η συχνότητα f ταλάντωσης των σημείων της χορδής θα είναι ίση με:

$$\omega = 2\pi\cdot f \Leftrightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} \Rightarrow f = \frac{4\pi}{2\pi} \Rightarrow f = 2\text{Hz}$$

Σύμφωνα με τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής το μήκος κύματος θα ισούται με:

$$\upsilon_\delta = \lambda\cdot f \Leftrightarrow \lambda = \frac{\upsilon_\delta}{f} \Rightarrow f = \frac{0,4}{2}\text{m} \Rightarrow \lambda = 0,2\text{ m}$$

Η σχέση (1) θα γίνει:

$$\omega\cdot 2A = 0,4\pi \Rightarrow 4\pi\cdot 2A = 0,4\pi \Rightarrow A = 0,05\text{ m}$$

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος, είναι:

$$y = 2A\cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi x}{\lambda}\cdot \eta\mu\frac{2\pi t}{T} \Rightarrow \boxed{y = 0,1\cdot \sigma\upsilon\nu 10\pi x\cdot \eta\mu 4\pi t\ (\text{S. I.})}\ (2)$$

Γ2. Το πλάτος της ταλάντωσης του σημείου Ν είναι ίσο με:

$$A'_N = 2A\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi\cdot x_N}{\lambda}\right| \Rightarrow A'_N = 0,1\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{4}\right|\text{m} \Rightarrow A'_N = 0,05\cdot\sqrt{2}\text{ m}$$

Εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για την ταλάντωση του σημείου Ν όταν η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας είναι ίση με $y_N = 0{,}05\,m$.

$$E_T = K + U_T \Rightarrow \frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\left(A'_N\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot m\cdot\upsilon_N^2 + \frac{1}{2}\cdot m\cdot\omega^2\left(y_N\right)^2 \Rightarrow$$

$$\upsilon_N^2 = \omega^2\cdot\left[\left(A'_N\right)^2 - \left(y_N\right)^2\right] \Rightarrow \left|\upsilon_N\right| = \omega\cdot\sqrt{\left(A'_N\right)^2 - \left(y_N\right)^2} \Rightarrow \boxed{\left|\upsilon_N\right| = 0{,}2\cdot\pi\,\frac{m}{s}}$$

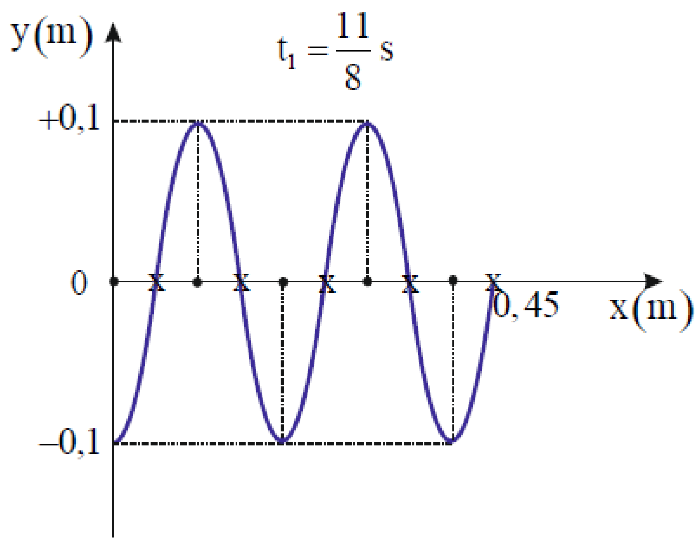
Γ3. Η περίοδος Τ της ταλάντωσης των σημείων της χορδής θα είναι ίση με:

$$T = \frac{1}{f} \Rightarrow T = 0{,}5\,s$$

Η εξίσωση του στιγμιότυπου του στάσιμου κύματος, είναι:

$$y = 0{,}1\cdot\sigma\upsilon\nu 10\pi x\cdot\eta\mu 4\pi t \overset{t=\frac{11}{8}s}{\Rightarrow} y = 0{,}1\cdot\sigma\upsilon\nu 10\pi x\cdot\eta\mu 4\pi\frac{11}{8} \Rightarrow$$

$$\boxed{y = -0{,}1\cdot\sigma\upsilon\nu 10\pi x\,(S.I.)} \overset{x=0}{\Rightarrow} y_0 = -0{,}1\,m$$



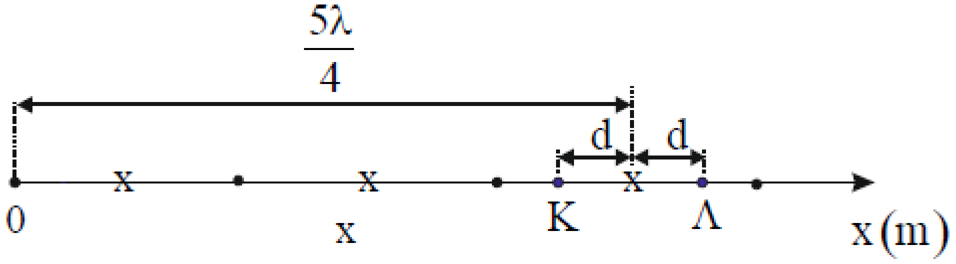
Η χρονική στιγμή που μας ζητείται να σχεδιάσουμε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος μπορεί να γραφεί και ως εξής:

$$t_1 = \frac{11}{8}s = 2T + \frac{3T}{4}$$

Η απόσταση (ΟΑ) είναι ίση με:

$$(\mathrm{OA}) = 2\lambda + \frac{\lambda}{4}$$

Γ4. Ο τρίτος δεσμός του θετικού ημιάξονα Οx βρίσκεται στη θέση $x_{\Delta 3} = \frac{5\lambda}{4}$.



Επομένως τα σημεία Κ και Λ βρίσκονται στις θέσεις

$$x_K = \frac{5\lambda}{4} - d \Rightarrow x_K = \frac{9}{40}\,\mathrm{m} \;\textbf{και}\; x_\Lambda = \frac{5\lambda}{4} + d \Rightarrow x_\Lambda = \frac{11}{40}\,\mathrm{m}$$

Η επιτάχυνση του σημείου Κ είναι ίση με:

$$\alpha_K = -\omega^2 \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi \cdot x_K}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi \cdot t}{T} \Rightarrow \alpha_K = -\omega^2 \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{9\pi}{4} \cdot \eta\mu\frac{2\pi \cdot t}{T} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_K = -\omega^2 \cdot \sqrt{2}A \cdot \eta\mu\frac{2\pi \cdot t}{T}}$$

Η επιτάχυνση του σημείου Λ είναι ίση με:

$$\alpha_\Lambda = -\omega^2 \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{2\pi \cdot x_\Lambda}{\lambda} \cdot \eta\mu\frac{2\pi \cdot t}{T} \Rightarrow \alpha_\Lambda = -\omega^2 \cdot 2A \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{11\pi}{4} \cdot \eta\mu\frac{2\pi \cdot t}{T} \Rightarrow$$

$$\boxed{\alpha_\Lambda = \omega^2 \cdot \sqrt{2}A \cdot \eta\mu\frac{2\pi \cdot t}{T}}$$

Όταν η ελαστική δυναμική ενέργεια της χορδής είναι μέγιστη τα σημεία Κ και Λ της χορδής βρίσκονται σε ακραίες θέσεις της ταλάντωσης τους. Ο λόγος των επιταχύνσεων $\frac{\alpha_K}{\alpha_\Lambda}$ είναι ίσος με:

$$\boxed{\frac{\alpha_K}{\alpha_\Lambda} = -1}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας όταν η σφαίρα Σ1 αφήνεται ελεύθερη.

$$E_{T1} = K + U_T \Rightarrow \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{D} \cdot A^2 = 0 + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{D} \cdot d^2 \Rightarrow A = d = 0{,}6\text{m}$$

Η κυκλική συχνότητα ω της ταλάντωσης της σφαίρας Σ1 είναι ίση με:

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m_1}} = \sqrt{\frac{150}{1{,}5}} \Rightarrow \omega = 10\,\frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Τη χρονική στιγμή $t=0$ η σφαίρα Σ1 βρίσκεται στην ακραία αρνητική θέση.

$$x_1 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \overset{t=0,\, x_1=-A}{\Rightarrow} -A = A \cdot \eta\mu\varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3\pi}{2}\,\text{rad}$$

Η εξίσωση της απομάκρυνσης της σφαίρας Σ1 από τη θέση ισορροπίας είναι:

$$x_1 = A \cdot \eta\mu(\omega \cdot t + \varphi_0) \Rightarrow \boxed{x_1 = 0{,}6 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot t + \frac{3\pi}{2}\right)(\text{S. I.})}$$

Δ2. Οι δύο σφαίρες συγκρούονται τη χρονική στιγμή:

$$t_1 = \frac{T}{12} = \frac{2\pi}{12\omega} \Rightarrow t_1 = \frac{\pi}{60}\,\text{s}$$

Η σφαίρα Σ1 τη χρονική στιγμή της κρούσης βρίσκεται στη θέση:

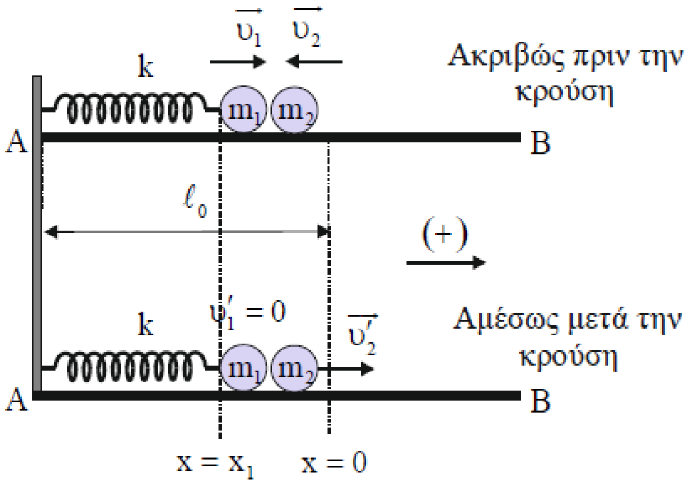
$$x_1 = 0{,}6 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot t_1 + \frac{3\pi}{2}\right)(\text{S. I.}) \Rightarrow x_1 = 0{,}6 \cdot \eta\mu\left(10 \cdot \frac{\pi}{60} + \frac{3\pi}{2}\right)\text{m} \Rightarrow$$

$$x_1 = 0{,}6 \cdot \eta\mu\frac{5\pi}{3}\,\text{m} \Rightarrow x_1 = -0{,}3\sqrt{3}\,\text{m}$$

Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας της σφαίρας Σ1 ακριβώς πριν την κρούση είναι ίση με:

$$\upsilon_1 = \omega \cdot A \cdot \sigma\upsilon\nu(\omega \cdot t_1 + \varphi_0) \Rightarrow \upsilon_1 = 6 \cdot \sigma\upsilon\nu\left(10 \cdot \frac{\pi}{60} + \frac{3\pi}{2}\right)\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\upsilon_1 = 6 \cdot \sigma\upsilon\nu\frac{5\pi}{3}\,\frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow \upsilon_1 = +3\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$



<u>Εξισώσεις κεντρικής ελαστικής κρούσης</u>

$$\upsilon_1' = \frac{(m_1 - m_2)\cdot\upsilon_1 + 2m_2\cdot\upsilon_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon_1' = \frac{(1,5-0,5)\cdot 3 + 2\cdot 0,5\cdot(-3)}{2}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_1' = 0\,\frac{m}{s}}$$

$$\upsilon_2' = \frac{2m_1\cdot\upsilon_1 + (m_2 - m_1)\cdot\upsilon_2}{m_1 + m_2} \Rightarrow \upsilon_2' = \frac{2\cdot 1,5\cdot 3 + (0,5-1,5)\cdot(-3)}{2}\,\frac{m}{s} \Rightarrow \boxed{\upsilon_2' = 6\,\frac{m}{s}}$$

Δ3. Η ενέργεια E_{T1} της ταλάντωσης της σφαίρας $Σ_1$ πριν την κρούση είναι ίση με:

$$E_{T1} = \frac{1}{2}\cdot D\cdot A^2 \Rightarrow E_{T1} = 27\ J$$

Μετά την κρούση η σφαίρα $Σ_1$ εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά επαναφοράς $D = k$. Εφαρμόζουμε τη διατήρηση της ενέργειας αμέσως μετά την κρούση.

$$E_{T1}' = K + U_T \Rightarrow E_{T1}' = \frac{1}{2}m_1\cdot(\upsilon_1')^2 + \frac{1}{2}D\cdot x_1^2 \Rightarrow E_{T1}' = 20,25\ J$$

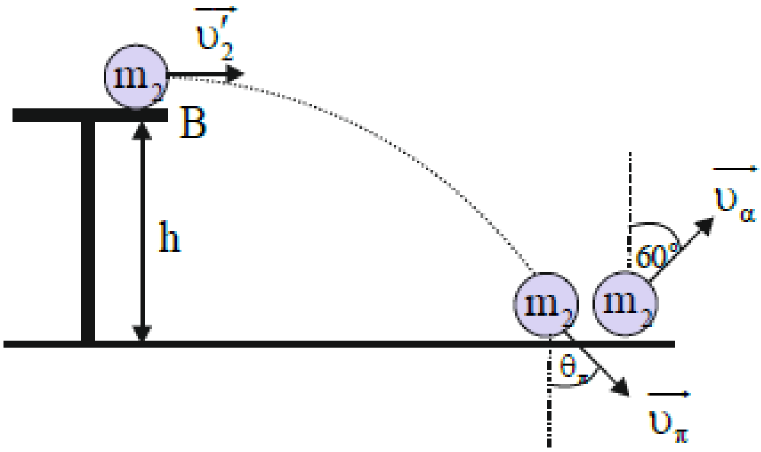
Το ποσοστό επί τοις εκατό μεταβολής της ενέργειας ταλάντωσης της σφαίρας $Σ_1$ εξαιτίας της κρούσης με τη σφαίρα $Σ_2$ είναι ίσο με:

$$\Delta E_{T1}\% = \frac{E_{T1}' - E_{T1}}{E_{T1}}\cdot 100\% \Rightarrow \Delta E_{T1}\% = \frac{20,25 - 27}{27}\cdot 100\% \Rightarrow \boxed{\Delta E_{T1}\% = -25\%}$$

Δ4. Εφαρμόζουμε το θεώρημα μεταβολής κινητικής ενέργειας για την κίνηση της σφαίρας Σ_2 από το σημείο που χάνει την επαφή με το τραπέζι μέχρι το σημείο πρόσπτωσης στο έδαφος.

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = W_{w_2} \Rightarrow \frac{1}{2}\cancel{m_2}\cdot(\upsilon_\pi)^2 - \frac{1}{2}\cancel{m_2}\cdot(\upsilon_2')^2 = \cancel{m_2}\cdot g\cdot h \Rightarrow \upsilon_\pi = 4\sqrt{3}\,\frac{m}{s}$$

Στην οριζόντια βολή η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 στον οριζόντιο άξονα παραμένει σταθερή.



1ος τρόπος

Η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της ταχύτητας πρόσπτωσης $\vec{\upsilon_\pi}$ της σφαίρας Σ_2 με τον κατακόρυφο άξονα είναι ίση με:

$$\eta\mu\theta_\pi = \frac{\upsilon_2'}{\upsilon_\pi} \Rightarrow \eta\mu\theta_\pi = \frac{6}{4\sqrt{3}} \Rightarrow \eta\mu\theta_\pi = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \boxed{\theta_\pi = 60^0}$$

Συνεπώς η κρούση της σφαίρας Σ_2 με το δάπεδο είναι ελαστική διότι η γωνία πρόσπτωσης ισούται με τη γωνία ανάκλασης.

2ος τρόπος

Η ταχύτητα της σφαίρας Σ_2 εξαιτίας της κρούσης στο δάπεδο διατηρείται στον οριζόντιο άξονα, διότι $\Sigma F_x = 0$. Συνεπώς

$$\upsilon_x' = \upsilon_2' = 6\,\frac{m}{s} \quad \text{και} \quad \eta\mu 60^0 = \frac{\upsilon_x'}{\upsilon_\alpha} \Rightarrow \boxed{\upsilon_\alpha = \upsilon_\pi = 4\sqrt{3}\,\frac{m}{s}}.$$

Συνεπώς η κρούση της σφαίρας Σ_2 με το δάπεδο είναι ελαστική διότι η κινητική της ενέργεια παραμένει σταθερή.

Δ5. Μετά τη σύγκρουση με το οριζόντιο δάπεδο η σφαίρα Σ_2 κινείται μόνο με την επίδραση του βάρους της. Συνεπώς η κινητική της ενέργεια μεταβάλλεται μόνο στον κατακόρυφο άξονα. Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της σφαίρας Σ_2 αμέσως μετά την κρούση είναι ίσος με:

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dW_{w_2}}{dt} = \frac{d\left(-w_2 \cdot y\right)}{dt} = -w_2 \cdot \frac{dy}{dt} = -w_2 \cdot \upsilon'_y \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = -w_2 \cdot \sigma\upsilon\nu 60^0 \cdot \upsilon_\alpha \Rightarrow \boxed{\frac{dK}{dt} = -10\sqrt{3}\,\frac{J}{s}}$$

Οι απαντήσεις είναι ενδεικτικές.

Κάθε επιστημονικά τεκμηριωμένη απάντηση είναι αποδεκτή.